第 46 講　総合問題⒁

1　$a>0$，$a\neq 1$　とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　正の実数 x，y に対して，$\log_a \dfrac{x+y}{2}$ と $\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)$　の大小関係を調べよ．

(2)　実数 x，y に対して，$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}$ および $\dfrac{1}{y}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　(2)において，$k=2x+y$　のとり得る値の範囲を求めよ．

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　を満たす整数 x，y の値をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] aを実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$　とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$x_n=a$ となるとき，a を求めよ．

(2) $a<1$ のとき，$x_n<1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める．

(1) $x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて　$f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す．このとき，$q \leqq 3$　となるような x をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　総合問題⑭

(1)　実数 x に関する連立不等式　$x \geqq -1,\ 2\cdot 3^{x} + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$　が解をもつような実数 a の範囲は　$a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$　である.

(2)　$x \geqq -1$　を満たすすべての実数 x に対し不等式　$3^{x} + a\cdot 3^{-x} \geqq a$　が成り立つような実数 a の範囲は　$-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{オ}}$　である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　総合問題⒁

1　$a>0$，$a\neq 1$　とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　正の実数 x，y に対して，$\log_a\dfrac{x+y}{2}$ と $\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)$　の大小関係を調べよ．

(2)　実数 x，y に対して，$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}$ および $\dfrac{1}{y}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　(2)において，$k=2x+y$　のとり得る値の範囲を求めよ．

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　を満たす整数 x，y の値をすべて求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)=\dfrac{1}{2}\log_a xy=\log_a\sqrt{xy}$

$a>1$ のとき　$\log_a\dfrac{x+y}{2}\geqq\log_a\sqrt{xy}$　　よって　$\boldsymbol{\log_a\dfrac{x+y}{2}\geqq\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)}$

$0<a<1$ のとき　$\boldsymbol{\log_a\dfrac{x+y}{2}\leqq\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)}$

(2)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

よって　$x+y=xy$　　真数条件より　$x,\ y>0$　　したがって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$

$x>0$　かつ　$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{x}>0$　　よって　$\boldsymbol{0<\dfrac{1}{x}<1}$　同様に　$\boldsymbol{0<\dfrac{1}{y}<1}$

(3)　$k=2x+y=(2x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}+3\geqq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+3=3+2\sqrt{2}$

よって　$\boldsymbol{k\geqq 3+2\sqrt{2}}$

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a xy$　より　$x+y=xy$　つまり　$(x-1)(y-1)=1$

$x>1$，$y>1$　より　$x-1>0$，$y-1>0$

よって　$(x-1,\ y-1)=(1,\ 1)$　　したがって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2)}$

2　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$　とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$x_1=a$，$x_{n+1}=f(x_n)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

で定める．次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n について，$x_n=a$ となるとき，a を求めよ．

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

$f(x)=x^3-3x^2+3x=x(x^2-3x+3)$　より

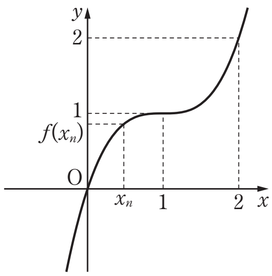
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqq 0$　よって　$f(x)$ は単調増加.

(1)　$x_{n+1}=f(x_n)=x_n{}^3-3x_n{}^2+3x_n$　において，すべての自然数 n で $x_n=a$ のとき

$a=a^3-3a^2+3a$　より　$a(a-1)(a-2)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=0,\ 1,\ 2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



(2)　$a<1$ のとき　$x_n<1$　……①　が成り立つことを示す.

$n=1$ のとき　$x_1=a<1$　より　①は成り立つ.

$n=k$ のとき　①すなわち　$a_k<1$　が成り立つとすると

グラフより　$x_{k+1}=f(x_k)<f(1)=1$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ.

したがってすべての自然数 n で①は成り立つ.

(3)　$0<a<1$ のとき　$x_n>0$　……②が成り立つことを示す.

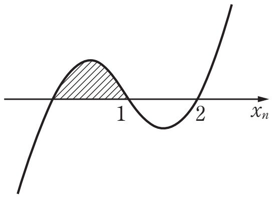
$n=1$ のとき　$x_1=a>0$　より　②は成り立つ.

$n=k$ のとき　②すなわち　$a_k>0$　が成り立つとすると

グラフより　$x_{k+1}=f(x_k)>f(0)=0$　よって　$n=k+1$ のときも②は成り立つ.

したがってすべての自然数 n で②は成り立つ.

(2)と合わせて，すべての自然数 n で　$0<x_n<1$ が成り立つ.



よって　$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n=x_n{}^3-3x_n{}^2+2x_n$

$=x_n(x_n-1)(x_n-2)>0$

ゆえに $x_n<x_{n+1}$

3　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める.

(1)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)　x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて　$f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す．このとき，$q\leqq 3$　となるような x をすべて求めよ.

---

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}=k$　とおく.

$x^2+2=k(x^2-2x+3)$　　$(k-1)x^2-2kx+3k-2=0$　……①

これを満たす実数 x が $x\geqq 0$ に存在するときの k の範囲を求める.

$k=1$ のとき　①より　$-2x+1=0$　$x=\dfrac{1}{2}$　　よって存在する.

$k\neq 1$ のとき　①の両辺を $k-1$ で割ると

$$x^2-\frac{2k}{k-1}x+\frac{3k-2}{k-1}=0$$

この式の左辺を $g(x)$ とおくと　軸：$x=\dfrac{k}{k-1}$　　$g(0)=\dfrac{3k-2}{k-1}$

判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=\dfrac{1}{(k-1)^2}\{k^2-(3k-2)(k-1)\}=-\dfrac{1}{(k-1)^2}(2k-1)(k-2)$

$D\geqq 0$ より　$(2k-1)(k-2)\leqq 0$　　$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(i)　$\frac{1}{2} \leqq k < 1$ のとき　軸 < 0　　よって　$x \geqq 0$ に解をもつのは　$g(0) \leqq 0$

つまり　$3k - 2 \geqq 0$　　$k \geqq \frac{2}{3}$　　　したがって　$\frac{2}{3} \leqq k < 1$

(ii)　$1 < k \leqq 2$ のとき　軸 > 0

よって　$x \geqq 0$ に少なくとも1解をもつ．したがって　$\frac{2}{3} \leqq k \leqq 2$

以上より　$\boldsymbol{\frac{2}{3} \leqq f(x) \leqq 2}$

(2)　自然数 q について　$q \leqq 3$　より　$q = 1,\ 2,\ 3$

$q = 1$ のとき　$f(x) = \frac{1}{p}$　これを満たす自然数 p は　(1)より　$p = 1$ のみ

このとき　$f(x) = 1$　となる x は　(1)より　$x = \frac{1}{2}$

$q = 2$ のとき　$f(x) = \frac{2}{p}$　これを満たす2と互いに素な自然数 p は　$p = 1,\ 3$

$p = 1$ のとき　$f(x) = 2$　より　$x^2 - 4x + 4 = 0$　　$x = 2$

$p = 3$ のとき　$f(x) = \frac{2}{3}$　より　$x^2 + 4x = 0$　これを満たす正の数 x はない．

$q = 3$ のとき　$f(x) = \frac{3}{p}$　これを満たす3と互いに素な自然数 p は　$p = 2,\ 4$

$p = 2$ のとき　$f(x) = \frac{3}{2}$　より　$x^2 - 6x + 5 = 0$　$x = 1,\ 5$

$p = 4$ のとき　$f(x) = \frac{3}{4}$　より　$x^2 + 6x - 1 = 0$　$x = -3 \pm \sqrt{10}$　これは有理数でない．

以上より　$\boldsymbol{x = \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 5}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　総合問題⒁

(1)　実数 x に関する連立不等式　$x \geqq -1$，$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$　が解をもつような実数 a の範囲は　$a \leqq \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$　である．

(2)　$x \geqq -1$　を満たすすべての実数 x に対し不等式　$3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$　が成り立つような実数 a の範囲は　$-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \leqq a \leqq \boxed{オ}$　である．

(1)　$t=3^x$　とおく．　$x \geqq -1$　に解をもつときの t の範囲は　$t \geqq \dfrac{1}{3}$

$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$　より　$2\cdot(3^x)^2 - 3^x + a \leqq 0$

よって　$2t^2 - t + a \leqq 0$　この不等式が　$t \geqq \dfrac{1}{3}$　に解をもてばよい．

$f(t) = 2t^2 - t + a = 2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2 + a - \dfrac{1}{8}$　とおくと　(グラフの軸) $\leqq \dfrac{1}{3}$　より

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) \leqq 0$　であればよい．　よって　$2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} + a \leqq 0$　より　$a \leqq \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(2)　$3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$　より　$(3^x)^2 - a\cdot 3^x + a \geqq 0$　つまり

(1)同様に　$t=3^x$　とおくと　$t^2 \geqq a(t-1)$

$t \geqq \dfrac{1}{3}$　を満たすすべての t で　$y=t^2$　……①　のグラフが

$y=a(t-1)$　……②　のグラフより上にあるときを考える．

②は $(1,\ 0)$ を通る傾き a の直線である．

①と②が接するのは

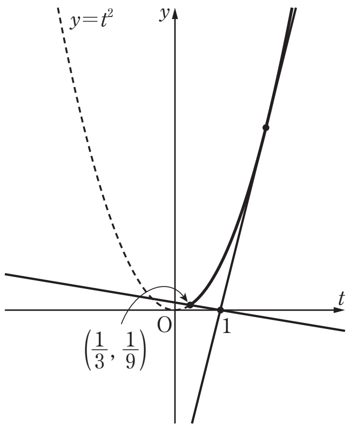
$t^2=a(t-1)$　つまり　$t^2-at+a=0$　で

判別式　$a^2-4a=0$ のとき

よって　$a=0,\ 4$

②が①上の点　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$　を通るのは　$a=-\dfrac{1}{6}$

よってグラフより求める a の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq 4}$



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。